

Egy ellipszises feladat

Az alábbi feladatot *Hajdu Endre* vezette elő. Mi ezt számítással oldjuk meg.

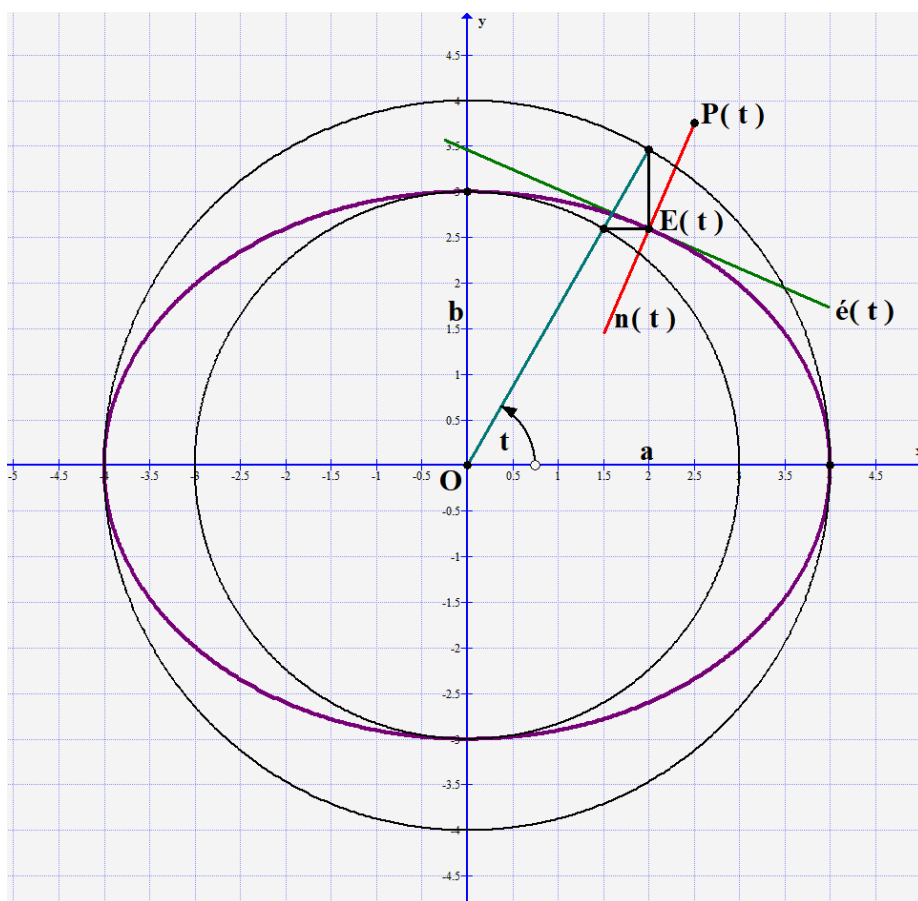
A feladat

Adott egy ellipszis és rajta kívül egy pont.

Határozzuk meg a görbe azon pontját, melynek normálisa illeszkedik a megadott ponthoz!

A megoldás

Ehhez tekintsük az 1. ábrát is!



1. ábra

Itt feltüntettük az (a, b) féltengelyekkel bíró ellipszist, annak egy t paraméteréhez tartozó $E(t)$ pontját, $e(t)$ érintőjét és $n(t)$ normálisát is. A normális egyenesén már felvehattünk egy $P(t)$ pontot is. A tényleges feladat az itt mondottnak egy fordítottja, hiszen $E - t$ kereszük (a, b) és P ismeretében. Nem baj, mert így hamarabb jutunk célhoz.

A szükséges összefüggések az alábbiak.

Az ellipszis paraméteres egyenletrendszer – az 1. ábra kétkörös szerkesztésének megfelelően – :

$$x(t) = a \cdot \cos t, \quad y(t) = b \cdot \sin t. \quad (1)$$

(1) -ből a t paramétert / segédváltozót kiküszöbölve kapjuk az ellipszis kanonikus egyenletét:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad (2)$$

Innen x szerinti deriválással:

$$\frac{2 \cdot x}{a^2} + \frac{2 \cdot y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{a^2} \cdot \frac{b^2}{y} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}, \quad (3)$$

ahol a dy/dx derivált az ellipszis érintőjének iránytangensét adja az ellipszis $E(x, y)$ pontjában:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}. \quad (4)$$

Az $E(x, y)$ pontbeli normális iránytangensére fennáll, hogy:

$$\operatorname{tg} \phi = \operatorname{tg}(\varphi \pm 90^\circ) = \frac{\operatorname{tg} \varphi \pm \operatorname{tg} 90^\circ}{1 \mp \operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} 90^\circ} = \frac{\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\operatorname{tg} 90^\circ} \pm 1}{\frac{1}{\operatorname{tg} 90^\circ} \mp \operatorname{tg} \varphi} = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}, \text{ tehát:}$$

$$\operatorname{tg} \phi = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi}, \quad (5)$$

ami két egyenes merőlegességének ismert feltétele.

Az adott $P(x_P, y_P)$ ponton átmenő normál - egyenes egyenlete az 1. ábra szerint:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{y_P - y}{x_P - x}; \quad (6)$$

most (4) és (5) szerint:

$$-\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y}{x}, \quad (7)$$

így (5), (6) és (7) - tel:

$$\frac{y_P - y}{x_P - x} = \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y}{x}. \quad (8)$$

(8) - at rendezve:

$$y_P = y + (x_P - x) \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{y}{x} = y \cdot \left(1 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \frac{x_P - x}{x}\right) \rightarrow y = \frac{y_P}{1 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \left(\frac{x_P}{x} - 1\right)}. \quad (9)$$

Majd (1) és (9) - cel:

$$\underline{\underline{b \cdot \sin t = \frac{y_P}{1 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \left(\frac{x_P}{a \cdot \cos t} - 1 \right)}}} \quad (10)$$

Ezt megoldva kapjuk $t_0 - t$, majd ezzel és (1) - gyel előállnak a keresett E pont koordi -
nátái:

$$\underline{\underline{x_0 = a \cdot \cos t_0, \quad y_0 = b \cdot \sin t_0}} \quad (11)$$

A (10) egyenletet nevezhetjük a probléma megoldó - egyenletének is.

Ezt grafikusán / numerikusan oldjuk meg. A részleteket az alábbi számpélda mutatja be.

SZÁMPÉLDA

Adott:

$$a = 4 \text{ (m)}, \quad b = 3 \text{ (m)}; \quad (A / 1)$$

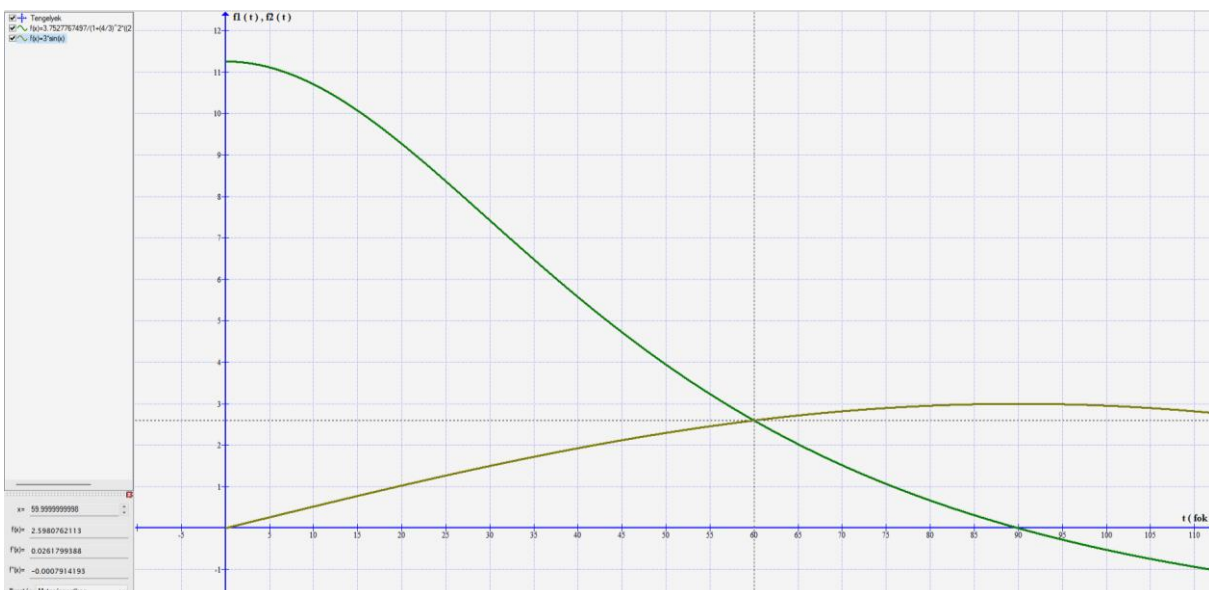
$$x_P = 2,5 \text{ (m)}; \quad y_P = 3,7527767497 \text{ (m)}. \quad (A / 2)$$

Keresett: x_0, y_0 .

Most (10) és (A) - val:

$$3 \cdot \sin t = \frac{3,7527767497}{1 + \frac{4^2}{3^2} \cdot \left(\frac{2,5}{4 \cdot \cos t} - 1 \right)} \quad (a)$$

Az (a) egyenlet grafikus megoldását a 2. ábra mutatja.



2. ábra

Az eredmény:

$$t_0 = 59.9999999998^\circ \approx 60^\circ. \quad (b)$$

Most (11), (A / 1) és (b) - vel:

$$\underline{x_0} = 4 (m) \cdot \cos(60^\circ) = \underline{2 (m)}, \quad (c / 1)$$

$$\underline{y_0} = 3 (m) \cdot \sin(60^\circ) = 2,598076211 (m) \approx \underline{2,598 (m)}. \quad (c / 2)$$

A (b) és (c) eredmények megfelelnek az 1. ábra felvételének. ☺

Ezzel kitűzött feladatunkat megoldottuk.

Megjegyzések:

M1. A (10) egyenlet megfelel egy negyedfokú algebrai egyenletnek, amit szintén grafi - kusan oldanánk meg. A hosszú és könnyebben eltéveszthető algebrai egyenlet helyett in - kább az egyszerűbb alakú és kezelhetőségű trigonometrikus egyenletnél maradtunk.

M2. A probléma úgy vetődött fel, hogy létezik - e a feladatnak szerkesztéses megoldása, és ha igen, akkor mi az. Ezt nem tudjuk; azt viszont igen, hogy a számításos megoldás nem nehéz, így szinte bárki számára elérhető, pl. a fentiek szerinti módon eljárva.

M3. Számunkra úgy tűnik, hogy a számítógépesített matematikában / geometriában már kevésbé fontos az a kérdés, hogy egy feladat megoldható - e szerkesztéssel, körző és vo - nalzó használatával. Gyanítjuk, hogy sokan inkább megtanulják a számítógépi programok valamilyen szintű használatát, csak ne kelljen körzővel és vonalzóval dolgozni. Meglehet, mi is így vagyunk ezzel, még ha tudjuk is, hogy mit kellene csinálni. Ugyanis nem min - denki tud eléggé pontosan és szépen szerkeszteni. Ez van.

Összeállította: **Galgóczi Gyula**
ny. mérnök tanár

Sződliget, 2023. 10. 19.

Továbbiak:

www.galgoczi.net